ФГБОУ ВО Московский государственный университет технологий и управления им. К.Г. Разумовского (ПКУ)

на олимпиаду «Кирилл Разумовский: к вершинам знаний»

1 тур

Фамилия ____________________ Дата проведения ___________

Имя _________________________ Учреждение _______________

Отчество _____________________

Олимпиада по математике

10 класс

I-вариант

Задание 1 (20 баллов). Чему равно процентное отношение среднего геометрического двух чисел к их среднему арифметическому, если одно число в четыре раза больше другого?

Решение:

Пусть одно число равно x, тогда другое число 9x. Их среднее арифметическое $\sqrt{a \cdot 9a} = 3a$, а среднее арифметическое $(a + 9a)/2 = 5a$. Процентное отношение равно $(3a/5a) \cdot 100\% = 60\%$.

Ответ: 60.

Задание 2 (20 баллов). В параллелограмме величина острого угла равна $60°$. Найти отношение длин сторон параллелограмма, если отношение квадратов длин диагоналей равно $1/3$.

Решение:

Пусть стороны параллелограмма x и y, меньшая диагональ d_1, а большая d_2. Тогда $2x^2 + 2y^2 = {d_1}^2 + {d_2}^2$. Но по условию ${d_2}^2 = 3{d_1}^2$, поэтому

$x^2 + y^2 = 2{d_1}^2$. По теореме косинусов ${d_1}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60 = {d_1}^2 - xy$, т.е. $xy = {d_1}^2$. Тогда $x^2 + y^2 + 2xy = 2{d_1}^2 + 2{d_1}^2 = 4{d_1}^2$ или $(x + y)^2 = 4{d_1}^2$, т.е. $x + y = 2d_1$. Решив систему $\begin{cases} x + y = 2d_1, \\ xy = {d_1}^2, \end{cases}$ получим $x = y = d_1$, значит отношение сторон параллелограмма равно 1.

Ответ: 1.

Задание 3 (20 баллов). Петр забыл номер автобуса, на котором ему нужно добраться до пригородной станции. Он знает, что в номере три цифры, причем последняя цифра четная, а сумма первой и второй равна 11, и первая цифра больше второй. Сколько существует таких номеров?

Решение:

Первые две цифры могут принимать 4 различных значения – 65, 74, 83, 92. Для каждого из этих чисел можно подобрать 5 вариантов третьей цифры: 1, 3, 5, 7, 9. Тогда по правилу произведения номеров будет $4 \cdot 5 = 20$.

Ответ: 20.

Задание 4 (20 баллов) Два неравных картонных диска разделены на 1965 равных секторов. На каждом из дисков произвольно выбраны 200 секторов и раскрашены в красный цвет. Меньший диск наложен на больший, так что их центры совпадают, а секторы целиком лежат один против другого. Меньший диск поворачивают на всевозможные углы, кратные $\frac{1}{1965}$ части окружности, оставляя больший диск неподвижным. Доказать, что по крайней мере при 60 положениях на дисках совпадут не более 20 красных секторов.

Решение:
Возьмём 1965 дисков, раскрашенных так же, как второй из наших дисков, и положим их на первый диск так, чтобы они занимали все возможные положения. Тогда над каждым окрашенным сектором первого диска расположено 200 окрашенных секторов, т. е. всего имеется 2002 пар совпадающих окрашенных секторов. Пусть имеется n положений второго диска, при которых совпадает не менее 21 пары окрашенных секторов. Тогда число совпадений окрашенных секторов не меньше 21n. Поэтому 21n $\leq$ 2002, т. е. n $\leq$ 1904, 8. Так как n — целое число, то n $\leq$ 1904. Следовательно, по крайней мере при1965 - 1904 = 61 положениях совпадает не более 20 пар окрашенных секторов.

ФГБОУ ВО Московский государственный университет технологий и управления им. К.Г. Разумовского (ПКУ)

на олимпиаду «Кирилл Разумовский: к вершинам знаний»

1 тур

Фамилия ____________________ Дата проведения ___________

Имя _________________________ Учреждение _______________

Отчество _____________________

Олимпиада по математике

11- класс

II-вариант

Задание 1 (20 баллов). Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 30 с, по неподвижному с той же скоростью за 48 с. За какое время он спустится, стоя на движущемся эскалаторе?

Решение:

Определим, сколько секунд сэкономил пассажир, спускаясь на эскалаторе. $48 - 30 = 18$ с. Найдем отношение скорости пассажира к скорости эскалатора $30/18 = 5/3$. Время, за которое он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора равно $48 \cdot (5/3) = 80$ с.

Ответ: 80.

Задание 2 (20 баллов). При каких a уравнение $(a-2)x^2 + (4-2a)x + 3 = 0$ имеет единственное решение?

Решение:

При $a = 2$ уравнение не имеет решений. Если $a \neq 2$, то получим квадратное уравнение, дискриминант которого должен быть равен 0. $D = 0$ при $a = 2$ или $a = 5$. Но $a = 2$ не подходит, поэтому $a = 5$.

Ответ: 5.

Задание 3 (20 баллов). Иван забыл последние четыре цифры номера телефона одноклассника. Он помнит, что последняя цифра нечетная, произведение первых двух равно 12, а сумма третьей и четвертой равна восьми? Сколько существует таких номеров?

Решение:

Первые две цифры принимают 4 различных значения (26 62, 34, 43). А последние две - четыре значения (17, 35, 53, 71). Тогда по правилу произведения номеров будет $4 \cdot 4 = 16$.

Ответ: 16.

Задание 4 (20 баллов) Два неравных картонных диска разделены на 1965 равных секторов. На каждом из дисков произвольно выбраны 200 секторов и раскрашены в красный цвет. Меньший диск наложен на больший, так что их центры совпадают, а секторы целиком лежат один против другого. Меньший диск поворачивают на всевозможные углы, кратные $\frac{1}{1965}$ части окружности, оставляя больший диск неподвижным. Доказать, что по крайней мере при 60 положениях на дисках совпадут не более 20 красных секторов.

Решение:
Возьмём 1965 дисков, раскрашенных так же, как второй из наших дисков, и положим их на первый диск так, чтобы они занимали все возможные положения. Тогда над каждым окрашенным сектором первого диска расположено 200 окрашенных секторов, т. е. всего имеется 2002 пар совпадающих окрашенных секторов. Пусть имеется n положений второго диска, при которых совпадает не менее 21 пары окрашенных секторов. Тогда число совпадений окрашенных секторов не меньше 21n. Поэтому $21n \leq 2002$, т. е. $n \leq 1904$, 8. Так как n — целое число, то $n \leq 1904$. Следовательно, по крайней мере при1965 - 1904 = 61 положениях совпадает не более 20 пар окрашенных секторов.